

ВОПРОСНИК ПО КУРСУ "КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ"

Осень 2010. Лектор В.Л.Попов.

1. Дать определения перестановок из n по r без повторений и с повторениями. Привести примеры. Указать формулы для их числа.
2. Дать определения сочетаний из n по r без повторений. Привести примеры. Указать формулу для их числа.
3. Дать определения сочетаний из n по r с повторениями. Привести примеры. Указать формулу для их числа.
4. Написать формулу бинома Ньютона. Дать определение биномиальных коэффициентов и указать простейшие тождества между ними.
5. Выписать формулу включения и исключения. Привести пример ее применения.
6. Рассказать как решается задача о беспорядках (о шляпах).
7. Дать определение линейной рекуррентной последовательности. Привести пример. Описать способ получения формулы для ее n -го члена. Привести пример нахождения такой формулы в каком-нибудь конкретном случае. Рассказать как выводится формула n -го члена ряда Фибоначчи.
8. Проиллюстрировать на примерах понятия графа, степени вершины графа, цикла в графе, связного графа, маршрута в графе, цикла, полного графа с n вершинами K_n , полного двудольного графа $K_{n,m}$, изоморфных и неизоморфных графов. Привести примеры изоморфных и неизоморфных графов. Может ли сумма степеней всех вершин графа быть равна 2009?
9. Дать определения эйлера графа, эйлера цикла. Сформулировать критерий эйлеровости графа. Привести пример нахождения эйлера цикла в эйлеровом графе.
10. Дать определение гамильтонова графа, гамильтонова цикла. Привести примеры гамильтонова и негамильтонова графов.
11. Сформулировать теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней связного плоского графа. Проверить ее утверждение для какого-либо конкретного графа.
12. Дать определение правильного выпуклого многогранника. Какую информацию можно вывести из теоремы Эйлера о числе вершин, ребер и граней связного плоского графа про возможное число вершин, ребер и граней правильного выпуклого многогранника?
13. Каким неравенством связано у связного плоского графа число P и число $3B-6$? Объяснить как из этого неравенства вытекает непланарность полного графа с 5 вершинами (т.е. графа K_5).
14. Каким неравенством связано у связного плоского графа число P и число $2B-4$? Объяснить как из этого неравенства вытекает непланарность графа $K_{3,3}$.
15. Дать определение гомеоморфных графов. Привести примеры гомеоморфных и негомеоморфных графов. Сформулировать критерий планарности (теорему Понтрягина--Куратовского). Привести пример применения этого критерия для какого-либо конкретного графа.
16. Доказать теорему Кенига. Дать определение рода графа. Какой род имеют графы K_5 и $K_{3,3}$? Обосновать ответ.
17. Дать определение топологической замкнутой поверхности без края. Дать определение ориентируемой и неориентируемой поверхности, привести примеры. Сформулировать теорему о классификации топологических замкнутых поверхностей без края. Зависит ли число $B-P+G$ от выбора связного графа без самопересечений на поверхности (подкрепить ответ примером)? Какое дополнительное условие нужно наложить на рассматриваемые графы, чтобы ответ на предыдущий вопрос был отрицательным? Дать определение эйлеровой характеристики топологической поверхности.
18. Вычислить эйлерову характеристику поверхностей S_g (сферы с g ручками) и N_p .

19. Каким неравенством связаны число В-Р-Г для любого связного графа без самопересечений на топологической поверхности и эйлера характеристика этой поверхности?
20. Каково минимальное число g , такое что полный граф K_s с s вершинами укладывается без самопересечений на сферу с g ручками? Укажите явно укладку без самопересечений графа K_5 на тор.
21. Каково минимальное число g , такое что граф $K_{n,m}$ укладывается без самопересечений на сферу с g ручками?
22. Расскажите о задаче о раскраске карт. Указать формулу для минимального числа красок, с помощью которых можно правильно раскрасить любую карту на замкнутой топологической поверхности без края. Вычислите это число c для тора. Нарисуйте на торе карту, которую нельзя правильно раскрасить меньшим, чем c , числом цветов.
23. Что такое сеть, ее пропускная способность, поток в сети, величина потока, разрез, пропускная способность разреза? Привести примеры. Сформулировать теорему Форда-Фалкерсона.
24. Изложить на примере алгоритм нахождения максимального потока и минимального разреза в сети.
25. Дать определение группы преобразований, привести примеры. Дать определение орбиты точки и стабилизатора точки относительно заданной группы преобразований. Привести примеры.
26. Описать все элементы для каждой из групп правильных многогранников.
27. Сформулировать основную теорему кристаллографии о строении конечных групп вращений трехмерного евклидова пространства. Проиллюстрировать ее на примере группы вращений куба с отпиленным углом при вершине.
28. Как связаны порядок конечной группы преобразований, порядок стабилизатора некоторой точки и порядок орбиты этой точки? Проиллюстрировать эту связь на примерах.
29. Как связаны стабилизатор точки x со стабилизатором точки $g(x)$, где g --- какое-то элемент из группы преобразований множества X ? Одинаковые ли у этих стабилизаторов порядки?
30. Сформулируйте теорему Бернсайда и проиллюстрируйте ее на примере, где X ---множество вершин куба, а G ---группа куба (т.е. группа всех его вращений).
31. Расскажите как подсчитать с помощью теоремы Бернсайда число ожерелий из 6 бусин трех разных цветов.
32. Расскажите как подсчитать с помощью теоремы Бернсайда число различных кубов, вершины которых покрашены в три разных цвета..
33. Что такое цикловой индекс конечной группы перестановок G множества X из n элементов? Вычислите его когда $n=3$ и G --- группа всех перестановок из 3 элементов. А какой вид он имеет для произвольного n когда G --- группа всех перестановок из n элементов?
34. Выпишите все орбиты группы подстановок из 3 элементов на множестве всех неупорядоченных пар различных элементов множества из 3 элементов.
35. Сформулируйте теорему Пойя о цикловом индексе и проиллюстрируйте ее на примере группы подстановок из 3 элементов.
36. Объясните схему нахождения числа неизоморфных графов с n вершинами и m ребрами с помощью теоремы Пойя. Проиллюстрируйте ее на примере, где $n=4$.