

## Занятия 1, 2 и 3

### ТЕМЫ:

- Элементы комбинаторики: перестановки и сочетания.
- Формула включения и исключения.
- Производящие функции и рекуррентные последовательности.

### Напоминания (лекционный материал)

Рассмотрим  $n$  урн, в каждой из которых лежит по *одному* шару, причем все шары — *разноцветные*.

*Перестановкой из  $n$  по  $r$  без повторений* называется выборка  $r$  шаров из этих урн, учитывающая порядок (последнее означает, что выбранные шары выкладываются последовательно в линию один за другим).

*Сочетанием из  $n$  по  $r$  без повторений* называется выборка  $r$  шаров из этих урн, не учитывающая порядок (последнее означает, что выбранные шары выкладываются в кучу).

Число перестановок из  $n$  по  $r$  без повторений равно

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Число сочетаний из  $n$  по  $r$  без повторений равно

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Имеет место следующая формула (*бином Ньютона*):

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r} \quad (1)$$

( $x$   $y$  — переменные).

\* \* \*

Рассмотрим  $n$  урн, в каждой из которых лежит *неограниченное число* (счетное) шаров, причем все шары в одной урне — *одноцветные*, а в разных урнах — *разноцветные*.

*Перестановкой из  $n$  по  $r$  с повторениями* называется выборка  $r$  шаров из этих урн, учитывающая порядок (последнее означает, что выбранные шары выкладываются последовательно в линию один за другим).

*Сочетанием из  $n$  по  $r$  с повторениями* называется выборка  $r$  шаров из этих урн, не учитывающая порядок (последнее означает, что выбранные шары выкладываются в кучу).

Число сочетаний из  $n$  по  $r$  с повторениями равно

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

Число перестановок из  $n$  по  $r$  с повторениями равно

$$n^r.$$

\* \* \*

Пусть  $A$  — непустое конечное множество, а  $A_1, \dots, A_n$  — его непустые подмножества. Тогда имеет место следующая *формула включения и исключения* (в ней  $|X|$  обозначает число элементов конечного множества  $X$ ):

$$\begin{aligned} |A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| = & |A| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \dots \\ & + (-1)^s \sum_{a \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_s}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Обычно  $A_i$  выделяется как подмножество тех элементов  $A$ , которые обладают некоторым свойством  $P_i$ . Тогда левая часть формулы — это количество элементов  $A_i$ , не обладающих ни одним из свойств  $P_1, \dots, P_n$ . Например, если  $A$  — группа студентов,  $A_1$  — множество тех из них, которые знают английский,  $A_2$  — французский,  $A_3$  — немецкий, то  $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$  — множество тех из них, которые не знают ни одного из этих языков.

\* \* \*

Пусть  $a_0, a_1, \dots$  — последовательность чисел. Ее *производящей функцией* называется (формальный) степенной ряд

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

от переменной  $x$ . Говорят, что  $F(x)$  *рациональна* и равна  $P(x)/Q(x)$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены от  $x$ , если

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)Q(x) = P(x)$$

(слева стоит произведение формального степенного ряда  $F(x)$  на многочлен  $Q(x)$ , определяемое очевидным образом.

**Пример 1.** Пусть  $a_r$  — число решений в целых неотрицательных числах уравнения  $x_1 + \dots + x_n = r$ . На лекциях было доказано, что

$$a_r = \binom{n+r-1}{r}$$

и что производящей функцией последовательности  $a_0, a_1, \dots$  является

$$\frac{1}{(1-x)^n}.$$

Говорят, что последовательность  $a_0, a_1, \dots$  *удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению* порядка  $r$ , если существуют такие константы  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , что

$$a_{n+r} = \alpha_1 a_{n+r-1} + \alpha_2 a_{n+r-2} + \dots + \alpha_r a_n \quad \text{для любого } n = 0, 1, 2, \dots$$

Для такой последовательности имеется формула, выражающая  $a_n$  прямо через номер  $n$ . Она описывается следующей теоремой.

**Теорема 1.** Рассмотрим (т.н. характеристический) многочлен

$$f(x) = x^r - \alpha_1 x^{r-1} - \alpha_2 x^{r-2} - \dots - \alpha_r$$

и разложим его на линейные множители:

$$f(x) = (x - \gamma_1)^{e_1} \dots (x - \gamma_s)^{e_s}, \quad (2)$$

$$e_1 + \dots + e_s = r, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}, \quad \gamma_i \neq \gamma_j \text{ при } i \neq j. \quad (3)$$

Тогда найдутся такие многочлены  $P_1(x), \dots, P_s(x)$ , где степень  $P_i(x)$  не превышает  $e_i - 1$  для любого  $i$ , что

$$a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \gamma_i^n, \quad \text{для любого } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

На практике многочлены  $P_1(x), \dots, P_s(x)$  ищут методом неопределенных коэффициентов, а именно: записывают  $P_i(x)$  с неопределенными коэффициентами,

$$P_i(x) = a_{i,0} x^{e_i-1} + a_{i,1} x^{e_i-2} + \dots + a_{i,e_i-1}, \quad (5)$$

и подставляют формулы (5) в (4) при  $n = 0, 1, \dots, r-1$ . Получается система из  $r$  линейных уравнений от  $r$  неизвестных  $a_{i,j}$ , которую решают методом Гаусса.

\* \* \*

## ЗАДАЧИ

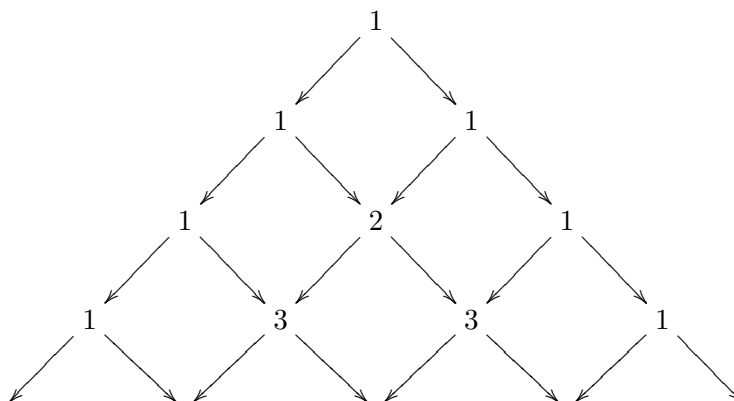
(все задачи решать не обязательно, часть задач дается на дом)

### Перестановки, сочетания, биномиальные коэффициенты:

(1) Доказать тождества

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

(2) Вывести из предыдущей задачи эффективный способ вычисления биномиальных коэффициентов с помощью треугольника Паскаля



в котором числа проставлены так: число, стоящее на месте  $P$  равно количеству односторонних маршрутов, начинающихся в вершине и кончающихся в  $P$ . Доказать, что число, стоящее в  $n$ -й строке на  $r$ -ом месте равно  $\binom{n}{r}$ . Объяснить

симметрию в расположении чисел по строке, а также их возрастание до середины строки.

(3) Доказать тождества

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n \quad (\text{положить } x = y = 1 \text{ в (1)});$$

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 0 \quad (\text{положить } x = 1, y = -1 \text{ в (1)});$$

$$\sum_{r=1}^n r(-1)^r \binom{n}{r} = 0, \quad n \geq 1 \quad (\text{положить } y = 1 \text{ в (1), продифференцировать по } x \text{ и положить } x = -1);$$

$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \binom{n}{k} = 0, \quad n \geq r \quad (\text{положить } y = 1 \text{ в (1), продифференцировать } r \text{ раз по } x, \text{ разделить на } r! \text{ и положить } x = -1).$$

(4) Доказать, что если  $p$  — простое число, то  $\binom{p}{r}$  при  $0 < r < p$  делится на  $p$ . (Поскольку  $\binom{p}{r}$  — целое, то  $p(p-1) \cdots (p-r-1)$  делится на  $r!$ . Так как  $r!$  при  $r < p$  взаимно просто в  $p$ , то  $(p-1)(p-2) \cdots (p-r-1)$  делится на  $r!$ )

(5) Доказать, что

$$\sum_{i=0}^m \binom{r}{i} \binom{s}{m-i} = \binom{r+s}{m}.$$

(Использовать, что  $(1+x)^r(1+x)^s = (1+x)^{r+s}$ .)

(6) Сколько существует положительных целых чисел, меньших  $10^n$  (в десятичной системе), цифры которых расположены в неубывающем порядке?

(7) Сколькими способами можно  $n$  одинаковых подарков раздать  $r$  детям: (а) без ограничений, (б) если каждый ребенок должен получить хотя бы один подарок?

(8) Сколько точек с целыми координатами содержится в тетраэдре, определенном неравенствами  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq d$ , где  $d$  — целое положительное число? (Нужно рассечь тетраэдр плоскостями  $x+y+z = d, x+y+z = d-1, x+y+z = d-2, \dots$  и использовать, что число решений в целых неотрицательных числах уравнения  $x+y+z = s$ , где  $s$  — целое положительное число, равно  $\binom{s+2}{2}$ , — это было установлено на лекциях в более общем виде).

(9) Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 251: №№1.3; 1.6(1);

стр. 253: №№1.14(1, 2, 3); 1.15(7,8);

стр. 255: №№1.20(3,5)

Простые задачи по комбинаторике можно брать также из приводимого на следующих 10 страницах списка.

## ЗАДАЧИ

### Формула включения и исключения, производящие функции

(1) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и чтобы ни одна из ладей не стояла на белой диагонали? (Это — задача о беспорядках, если сопоставить ладье, стоящей на  $i$ -й горизонтали, номер содержащей ее вертикали. Задача о беспорядках разбиралась на лекциях, среди перестановок степени  $n$  число беспорядков равно  $n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$ .)

(2) Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 261: №№2.4, 2.5, 2.7(1,2).

(3) Пусть  $\varphi(n)$  — количество натуральных чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с  $n$ . Доказать, что если разложение числа  $n$  на простые множители имеет вид  $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ , где  $p_1, \dots, p_m$  — попарно различные простые числа  $\geq 2$ , а  $k_1, \dots, k_m$  — целые положительные числа, то

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

(Скажем, что целое число обладает свойством  $P_i$ , если это число делится на  $p_i$ . Количество целых положительных чисел, обладающих свойствами  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  и не превосходящих  $n$ , равно  $n/p_{i_1} \dots p_{i_k}$ . По формуле включения и исключения получаем отсюда, что

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^m \sum \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

(4) Доказать, что производящая функция  $F(x)$  последовательности  $a_0, a_1, \dots$  имеет вид:

(a) если  $a_n = \alpha^n$  для любого  $n$ , то  $F(x) = 1/(1 - \alpha x)$ ;

(b) если  $a_n = \alpha n$  для любого  $n$ , то  $F(x) = \alpha x/(1 - x)^2$ .

(c) если  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N, \\ 0 & \text{при } n \geq N \end{cases}$ , то  $F(x) = (1 - x^{N+1})/(1 - x)$ ;

(d) если  $a_n = \begin{cases} n + 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N, \\ 0 & \text{при } n \geq N \end{cases}$ , то

$F(x) = (1 - (N + 2)x^{N+1} + (N + 1)x^{N+2})/(1 - x)^2$  (использовать (c) и дифференцирование).

(5) Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 264: №№3.3 (1, 2, 3), 3.5(1, 2);

стр. 265: №№3.7(5);

стр. 266: №№3.8(4);

стр. 269: №№3.14(1, 2, 3, 9).

**В КОНЦЕ ЗАНЯТИЯ 3 СЛЕДУЕТ ВЫДАТЬ НА ДОМ ДОМАШНЮЮ РАБОТУ №1.** Задания лежат в конверте. Просьба возвращать задания в конверт! Номер задания совпадает в номером студента в журнале группы.

### Занятия 4, 5, 6, 7

#### ТЕМЫ:

- Начальные понятия теории графов. Изоморфизм графов.
- Эйлеровы и гамильтоновы графы. Планарность. Топологические поверхности. Графы на поверхностях.
- Потоки в сетях.

#### Напоминания (лекционный материал)

На лекциях у графов допускались кратные ребра и петли (т.е. термины *мультиграф* и *псевдограф* не вводились). Далее рассматриваются только случаи графов с конечным числом вершин и ребер.

\* \* \*

*Матрица смежности* неориентированного (соотв., ориентированного) графа с  $n$  занумерованными вершинами  $v_1, \dots, v_n$  — это матрица размера  $n \times n$ , у которой элемент, расположенный на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен числу ребер с концами  $v_i$  и  $v_j$  (соответственно, с началом  $v_i$  и концом  $v_j$ ).

Два графа называются *изоморфными*, если их вершины можно занумеровать так, что матрицы смежности, отвечающие этим нумерациям, равны.

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — два графа с одинаковым числом вершин  $n$  и  $A_1$  и  $A_2$  — их матрицы смежности относительно каких-то нумераций вершин. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- $G_1$  и  $G_2$  изоморфны;
- найдется такая подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

что  $A_2$  получается из  $A_1$  сначала перестановкой первой строки на  $i_1$ -е место, второй строки на  $i_2$ -е место и т.д., а затем такой же переставкой столбцов;

- $A_2 = S_\sigma^{-1} A_1 S_\sigma$ , где  $S_\sigma$  — матрица размера  $n \times n$ , у которой для любого  $s$  на пересечении  $s$ -й строки и  $i_s$ -го столбца стоит 1, а на остальных местах нули.

Отсюда получается такое необходимое условие изоморфности графов: Если  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, то характеристические многочлены матриц  $A_1$  и  $A_2$  равны.

\* \* \*

Цикл в графе, содержащий по одному разу каждое ребро, называется *эйлеровым*. Граф, содержащий такой цикл, называется *эйлеровым графом*. Неформально: эйлеров — это такой граф, который можно нарисовать, не отрывая руки,

не проводя дважды по одному и тому же ребру, и при этом в конце вернуться в исходную точку. Если убрать последнее условие, то граф называется *уникурсальным*.

**Теорема 1 (Эйлер).** *Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

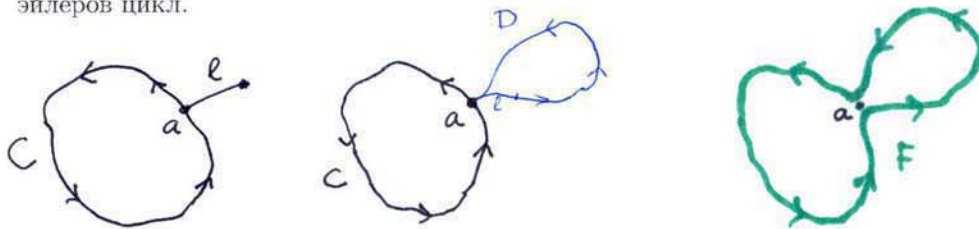
**Следствие 1.** *Связный граф уникурсален тогда и только тогда, когда либо степени всех его вершин четны, либо ровно у двух вершин степени нечетны.*

*Алгоритм нахождения эйлерова цикла в эйлеровом графе.*

- Начиная с любой вершины, движемся куда угодно с одним ограничением — не ходить вновь по уже пройденному ребру. Это движение автоматически закончится в исходной вершине, т.е. пройденный путь является циклом  $C$ .

- Если  $C$  не эйлеров, то обязательно из одной из его вершин  $a$  выходит ребро  $\ell$ , не лежащее в  $C$ . Двигаемся теперь как и в предыдущем пункте, выйдя из  $a$  по  $\ell$ . Движение закончится в  $a$ , т.е. пройденный путь является циклом  $D$ .

- Теперь "увеличиваем"  $C$  с помощью  $D$  как показано на рисунке. Получающийся при этом новый цикл  $F$  длиннее, чем  $C$ . Если он не эйлеров, то "увеличиваем" его аналогичным способом. И т.д. Через конечное число шагов получится эйлеров цикл.



*Алгоритм рисования уникурсального графа, не отрывая руки и не проводя более одного раза по одному и тому же ребру.*

- Можно считать, что граф  $G$  не эйлеров (иначе применяем алгоритм нахождения эйлерова цикла). Тогда в нем есть ровно две вершины с нечетными степенями. Добавим к графу новое ребро  $\ell$ , соединяющее эти вершины. Получится эйлеров граф  $G'$ .

- Найдем в  $G'$  эйлеров цикл. Ребро  $\ell$  в него входит. Удалим его из этого цикла. Получится искомый маршрут.

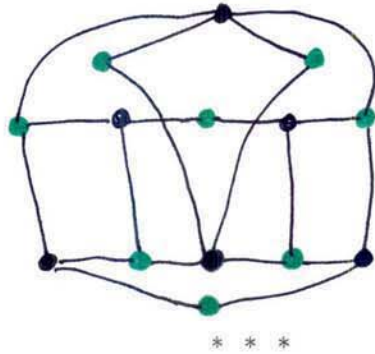


\* \* \*

Цикл в графе, при прохождении по которому встречается ровно один раз каждая вершина графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий такой цикл, называется *гамильтоновым*.

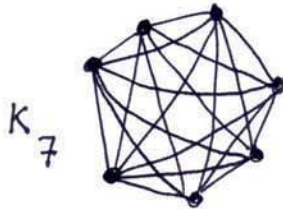
**Теорема 3** (Достаточное условие негамильтоновости графа). *Если вершины графа можно раскрасить двумя красками так, что концы любого ребра являются разноцветными и число вершин одного цвета не равно числу вершин другого цвета, то граф не гамильтонов.*

**Пример.** Нарисованный ниже граф не гамильтонов.



*Полный граф  $K_n$*  — это неориентированный граф с  $n$  вершинами, у которого любые две разные вершины являются концами ровно одного ребра.

*Полный двудольный граф  $K_{n,m}$*  — это неориентированный граф с  $n + m$  вершинами, разбитыми на две непересекающиеся группы из  $n$  и  $m$  вершин, у которого любые две вершины из разных групп являются концами ровно одного ребра и никаких других ребер нет.



$K_7$



$K_{3,2}$

Графы называются *гомеоморфными*, если от одного к другому можно перейти с помощью нескольких операций добавления и удаления вершины на ребре (операции I и II).



Операция I



Операция II



Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать (уложить) на плоскости без самопересечений.

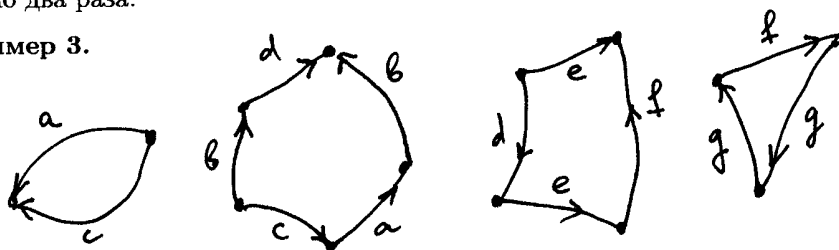
**Теорема 4** (Теорема Понтрягина–Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .*

\* \* \*

Рассмотрим на плоскости цикл без самопересечений. Считая плоскость сделанной из растяжимой пленки, будем называть ограниченную им внутреннюю область вместе с границей *топологическим многоугольником*, понимая под словом *топологический* разрешение произвольно деформировать указанный кусок пленки, лишь бы не происходило разрывов и склеиваний.

Пусть задано конечное число топологических многоугольников. Предположим, что на каждой из их сторон зафиксировано одно из двух возможных направлений и проставлена какая-либо буква  $a, b, c, \dots$ . Допустим еще, что каждая из использованных букв встречается на сторонах всех этих многоугольников ровно два раза.

**Пример 3.**



**Определение 1.** *Замкнутой топологической поверхностью без края* называется объект (поверхность), полученный из такой системы топологических многоугольников склейкой (отождествлением) сторон, помеченных одинаковыми буквами, согласно выбранным на этих сторонах направлениям.

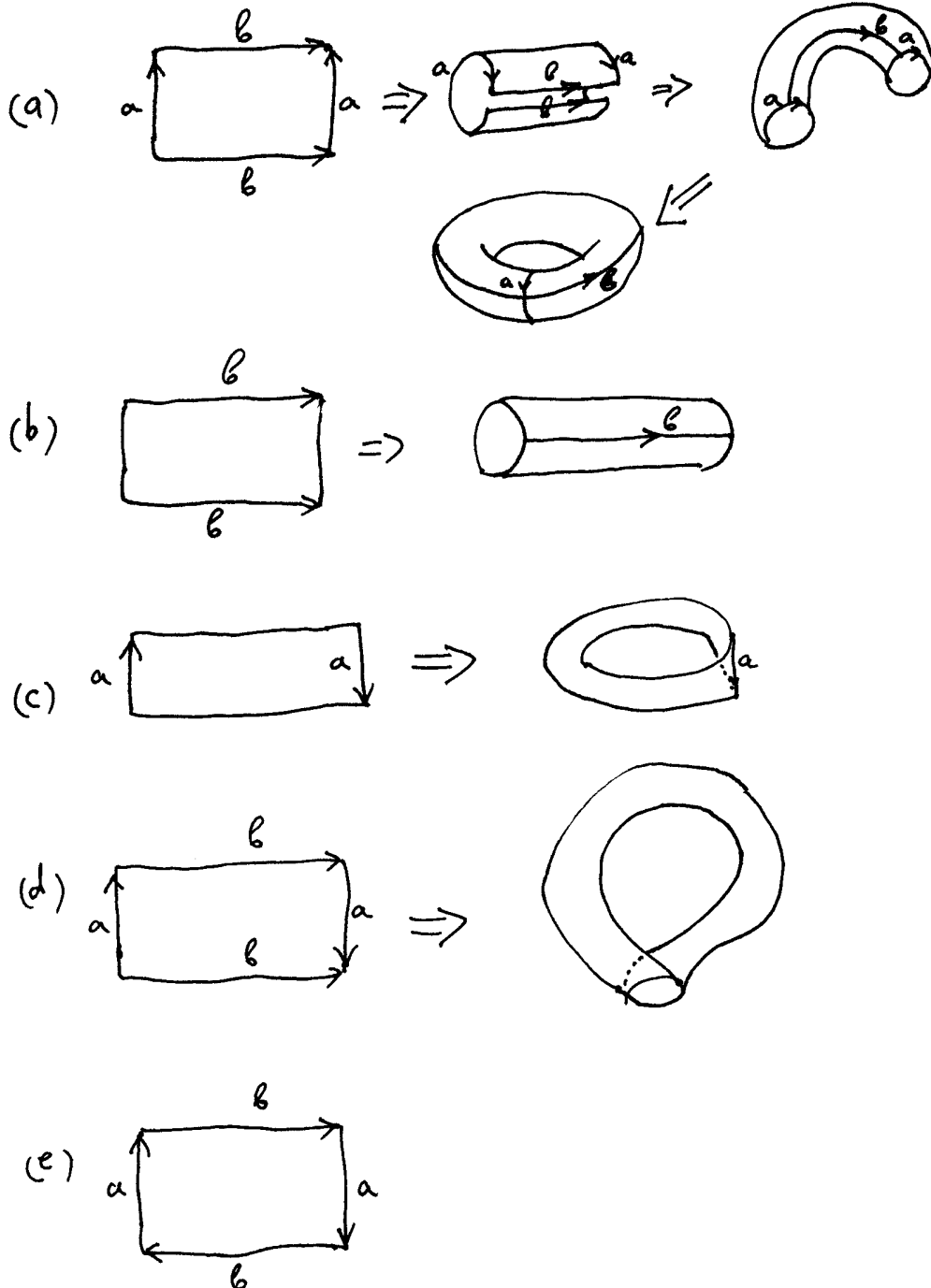
Аналогично определяется *замкнутая топологическая поверхность с краем*: нужно лишь допустить, что на некоторых сторонах направление не выбрано и буква не проставлена.

"Склеивание" следует понимать не как возможность реально осуществить его в трехмерном пространстве (обычно это невозможно), а как правило, которое известно насекомому, ползающему по этим многоугольникам: как только насекомое попадает на сторону одного из многоугольников, считается, что оно оказалось в соответствующей точке стороны другого многоугольника (эти две точки и называют "склеивающимися"), что позволяет ему ползти дальше по этому другому многоугольнику.



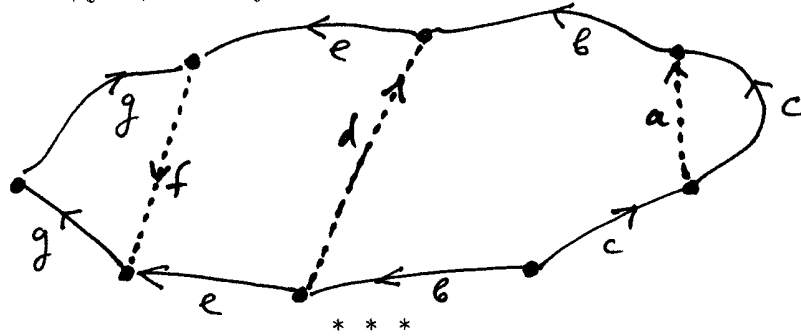
**Пример 4.** Система многоугольников состоящая из единственного четырехугольника с указанным выбором направлений сторон и пометок является тором

в случае (а), цилиндром в случае (b), листом Мебиуса в случае (с), так называемой бутылкой Клейна в случае (d) и так называемой проективной плоскостью в случае (e) (последние две не могут быть размещены в трехмерном пространстве без самопересечений).

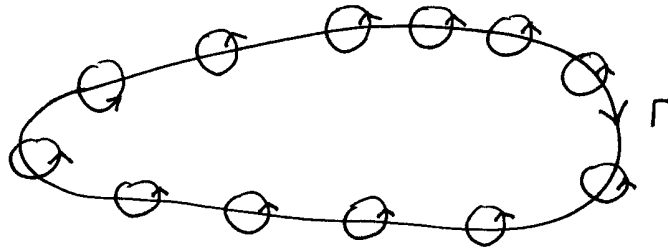


На самом деле систему топологических многоугольников, определяющих данную топологическую поверхность всегда можно заменить на один такой многоугольник, склеивая стороны разных многоугольников, помеченные одной и той же буквой. Следующий пример поясняет как это происходит.

**Пример 5.** Четыре многоугольника из Примера 3 определяют ту же поверхность, что и следующий многоугольник:

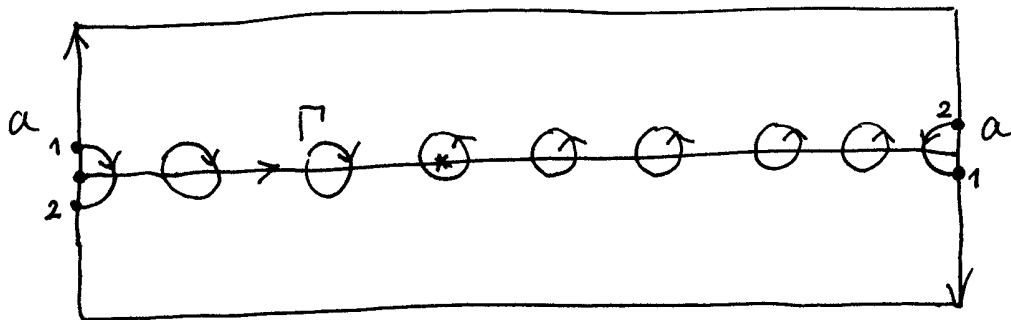


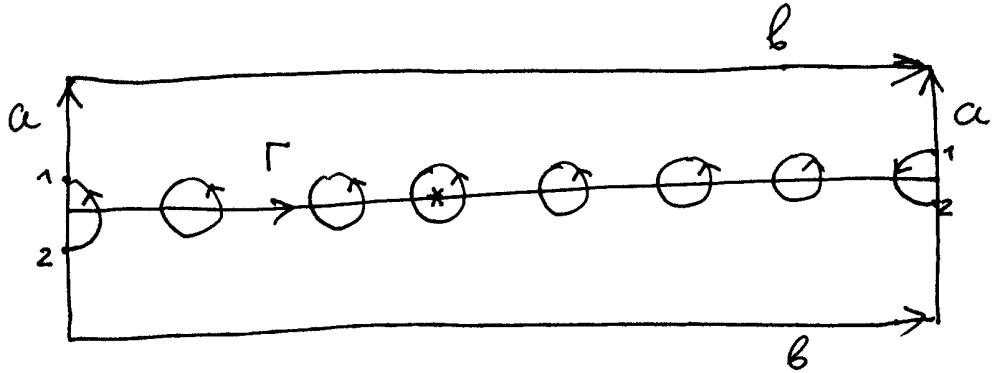
Рассмотрим на топологической поверхности  $X$  какую-либо замкнутую кривую  $\Gamma$  с выбранным на ней направлением. Будем перемещать вдоль этой кривой по указанном направлению небольшой лежащий на поверхности контур (монету, на краю которой указано какое-либо направление). После полного обноса, при возвращении в исходную точку направление на контуре может либо сохраниться, либо измениться на противоположное.



**Определение 2.** Поверхность  $X$  называется *неориентируемой*, если найдется такая кривая  $\Gamma$ , что после обноса вдоль нее направление на контуре меняется на противоположное. В противном случае  $X$  называется *ориентируемой*.

**Пример 6.** Как видно из рисунков, лист Мебиуса является неориентируемой поверхностью, а тор — ориентируемой.





Как узнать является замкнутая топологическая поверхность  $X$  ориентируемой или неориентируемой.

- Зададим  $X$  с помощью одного топологического многоугольника  $M$ , на сторонах которого выбраны направления и расставлены буквы (выше объяснено как это сделать). Будем двигаться вдоль границы  $M$  в каком-нибудь направлении.
- Тогда  $X$  неориентируема в том и только в том случае, когда найдутся две стороны многоугольника  $M$ , которые помечены одинаковой буквой, а выбранные на них направления когерентны, т.е. либо оба совпадают с направлением движения, либо оба не совпадают с ним.

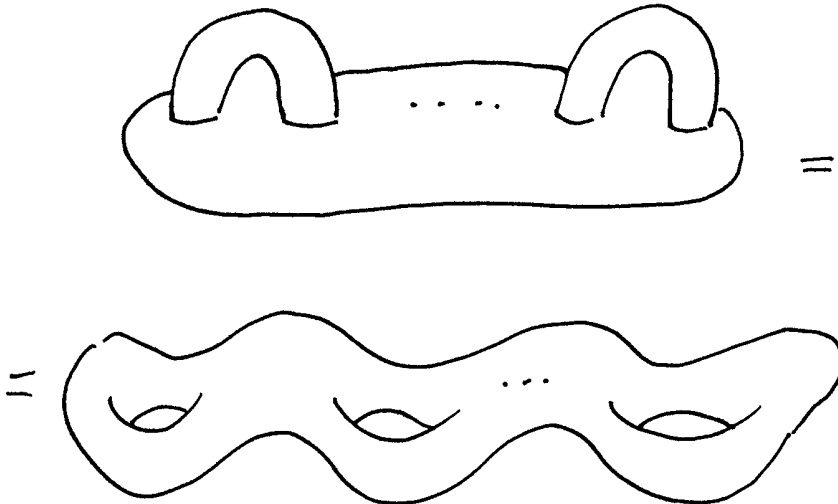
**Пример 7.** Поверхность из примера 5 неориентируема, поскольку при обходе края многоугольника по часовой стрелке направления на сторонах, помеченные буквой  $g$ , когерентны (они совпадают с направлением движения).

\* \* \*

Имеется полная классификация замкнутых топологических поверхностей. В ответе фигурируют два специальных типа таких поверхностей.

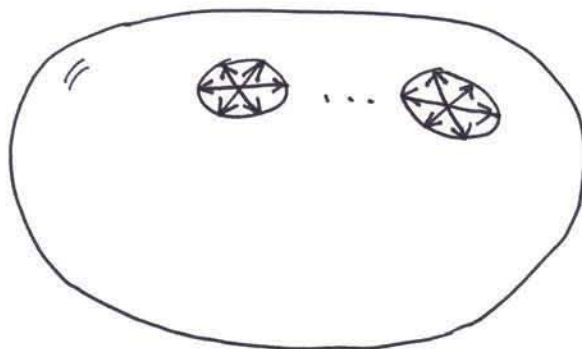
Поверхности  $S_g$ ,  $g \geq 0$ .

Вырежем в сфере  $2g$  дисков, разобем полученные отверстия на пары и к границам каждой пары приклеим по граничным окружностям цилиндр. Получающаяся поверхность  $S_g$  называется сферой с  $g$  ручками.



Поверхности  $N_p$ ,  $p \geq 1$ .

Вырежем в сфере дисков  $p$  и у края каждого из полученных отверстий отождествим диаметрально противоположные точки. Эквивалентно: к границе каждого отверстия приклеим границу листа Мебиуса. Получающаяся поверхность  $N_p$  называется сферой с  $p$  вклеенными листами Мебиуса.



Легко доказывается (см. задачи ниже), что  $S_g$  и  $N_p$  действительно являются замкнутыми топологическими поверхностями без края в смысле данного выше определения 1.

**Теорема 5** (Классификация топологических поверхностей). *Замкнутые ориентируемые (соответственно, неориентируемые) топологические поверхности без края — это поверхности  $S_g$  (соответственно,  $N_p$ ) и только они.*

\* \* \*

**Теорема 6** (Кениг). *Всякий граф может быть уложен без самопересечений на поверхность  $S_g$  для подходящего  $g$ .*

**Определение 3.** Минимальное  $g$ , для которого граф  $K$  может быть уложен без самопересечений на поверхность  $S_g$ , называется *родом* графа  $K$ . Род обозначается через  $\gamma(K)$ .

**Теорема 7.** *Для любого вещественного числа  $x$  обозначим через  $\{x\}$  наименьшее целое число, не меньшее  $x$ . Тогда*

$$\gamma(K_d) = \left\{ \frac{(d-3)(d-4)}{12} \right\}, \quad \gamma(K_{n,m}) = \left\{ \frac{(n-2)(m-2)}{4} \right\}. \quad (6)$$

Если граф  $K$  уложен без самопересечений на топологическую поверхность  $X$ , то куски этой поверхности, на которые она распадается, если ее разрезать по ребрам этого графа, называются *гранями* графа  $K$ .

**Теорема 8.** *Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — два графа без самопересечений на топологической поверхности  $X$ . Пусть  $B_i, P_i, \Gamma_i$  — соответственно число вершин, ребер и граней графа  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда, если все грани являются топологическими многоугольниками, то*

$$B_1 - P_1 + \Gamma_1 = B_2 - P_2 + \Gamma_2. \quad (7)$$

**Определение 4.** Число (7) (согласно теореме 7, оно зависит только от поверхности  $X$ ) называется *эйлеровой характеристикой* поверхности  $X$  и обозначается через  $\chi(X)$ .

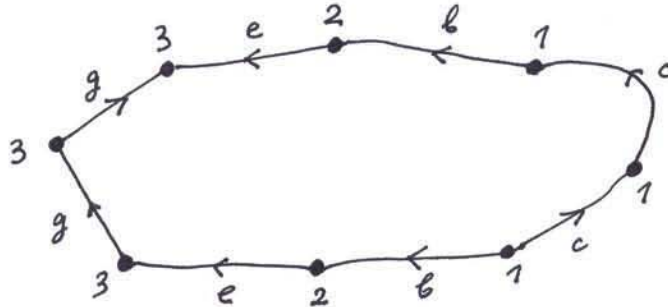
**Теорема 9.**

$$\chi(S_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_p) = 2 - p. \quad (8)$$

*Как практически определить тип замкнутой топологической поверхности без края  $X$  по системе задающих ее топологических многоугольников.*

- Заменяем систему многоугольников на один многоугольник, задающий ту же поверхность  $X$  (см. пример 5).
- По классификационной теореме,  $X$  — это  $S_g$  или  $N_p$ . Определяем по полученному многоугольнику ориентируема  $X$  или нет (см. пример 7). Это дает возможность определить какой же из двух случаев ( $S_g$  или  $N_p$ ) имеет место.
- Остается найти  $g$  (если это поверхность типа  $S_g$ ) или  $p$  (если она типа  $N_p$ ). Для этого вычисляем эйлерову характеристику (пример 8 иллюстрирует как это сделать) и применяем формулы (8).

**Пример 8.** Найдем тип поверхности, заданной системой многоугольников из примера 3. Согласно примеру 5, та же поверхность задается одним многоугольником, указанным в этом примере. Согласно примеру 7, эта поверхность неориентируема, т.е. является поверхностью типа  $N_p$ . Остается вычислить  $p$ . Для этого рассмотрим на этой поверхности граф  $K$ , ребра которого являются сторонами указанного в примере 5 многоугольника:



Этот граф не имеет самопересечений и у него имеется единственная грань — сам этот многоугольник. Поэтому, по теоремам 7 и 8, для этого графа число  $B - P + \Gamma$  совпадает с  $\chi(X) = 2 - p$ , причем  $\Gamma = 1$ . Так как стороны, помеченные одной буквой, склеиваются, они дают одно ребро графа  $K$ . Значит,  $P = 4$ . Эта склейка отождествляет и соответствующие вершины многоугольника — такие вершины дают одну вершину графа  $K$  (на рисунке склеивающиеся вершины помечены одинаковыми цифрами). Это дает  $B = 3$ . Значит,

$$2 - p = 3 - 4 + 1 = 0, \quad \text{так что} \quad p = 2.$$

\* \* \*

Если  $K$  — граф без самопересечений на сфере, то все грани автоматически являются топологическими многоугольниками (это — нетривиальная теорема Жордана). Из теорем 7 и 8 поэтому следует, что для такого графа

$$V - P + \Gamma = 2. \quad (9)$$

Рассматривая стереографическую проекцию сферы на плоскость из какой-либо внутренней точки грани, мы получаем граф без самопересечений на плоскости. Ясно, что всякий граф без самопересечений на плоскости так получается. Поэтому имеет место

**Теорема 10 (Эйлер).** *Для всякого графа без самопересечений на плоскости имеет место равенство (12).*

### ЗАДАЧИ

(все задачи решать не обязательно, часть задач дается на дом)

#### Начальные понятия:

(1) Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 105: №№1.3, 1.6, 1.7, 1.9, 1.11, стр. 115: №№2.26, 2.27.

(2) Выписать матрицы смежности для графов на рис. 3, 4, 5, 6 на стр. 107 книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, занумеровав как-то их вершины.

(3) Нарисовать графы, имеющие следующие матрицы смежности (относительно некоторой нумерации вершин):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Проверить на конкретном примере как преобразуется матрица смежности при изменении нумерации вершин.

(5) Доказать, что число неизоморфных неориентированных графов с  $n$  вершинами и  $s$  ребрами не превосходит

$$\binom{n(n+1)/2 + s - 1}{s}. \quad (10)$$

(Из определения следует, что матрица смежности такого графа является симметрической матрицей размера  $n \times n$ , у которой сумма элементов, стоящих ниже главной диагонали, равна  $s$ . Число этих элементов равно  $n(n+1)/2$  и каждый из этих элементов является целым неотрицательным числом. Поэтому число указанных графов не больше, чем число таких матриц, а последнее равно числу решений в целых неотрицательных числах уравнения  $x_1 + \dots + x_{n(n+1)/2} = s$ . Оно равно числу (10), см. выше пример 1).

#### Изоморфизм графов:

Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 106: №№1.16, 1.19, 1.20, 1.21.

#### Планарность и теорема Эйлера:

Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 113: №№2.1, 2.2, 2.3, 2.4, стр. 114: №№2.9, 2.12.

(О задаче 2.9 на стр. 114. В ней рассматриваются графы без петель и кратных ребер. Тогда грани не менее, чем треугольники, и потому  $2P \geq 3I$ . Если бы все степени были не меньше 6, то  $2P \geq 6B$ . Т.о.,  $I \leq 2P/3$  и  $B \leq P/3$ . Поэтому  $B - P + I \leq P/3 - P + 2P/3 = 0$ . Но по теореме Эйлера левая часть равна 2. Противоречие.)

Эйлеровость, уникальность:

Применить алгоритм к каким-либо графам (преподаватель без труда нарисует их сам), удовлетворяющим соответствующим ограничениям на степени вершин.

Гамильтоновость:

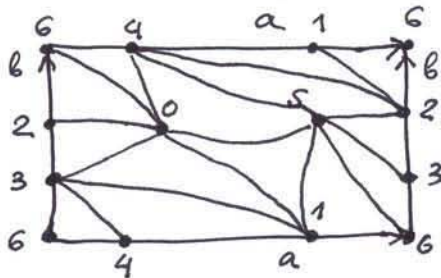
Задачи из книги Г. П. Гаврилов, Ф. Ф. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*, Наука, М., 1977:

стр. 109: №№1.32, 1.33.

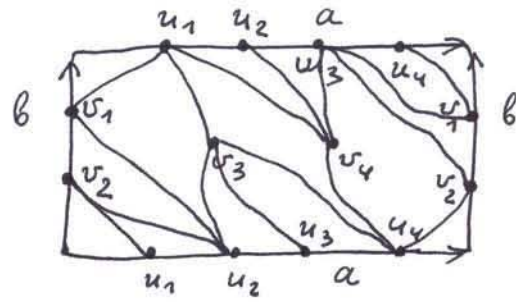
Топологические поверхности и графы на них:

(1) Убедиться с помощью формул (6), что  $\gamma(K_7) = 1$  и  $\gamma(K_{4,4}) = 1$ , и построить явно укладки  $K_7$  и  $K_{4,4}$  на  $S_1$ , т.е. на тор.

Решение. Вот эти укладки



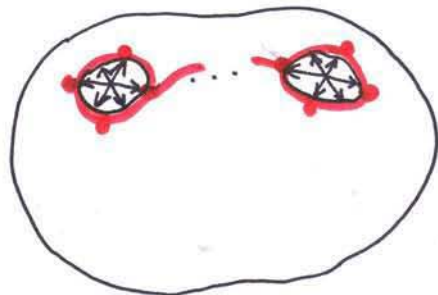
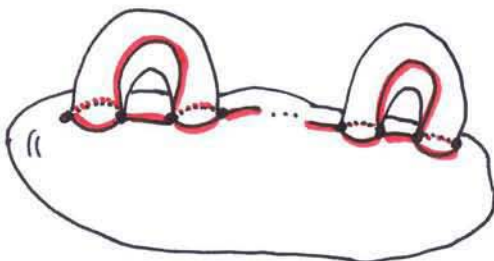
Укладка  $K_7$



Укладка  $K_{4,4}$

(2) Убедиться, что  $S_g$  и  $N_p$  — действительно топологические поверхности в смысле определения 1.

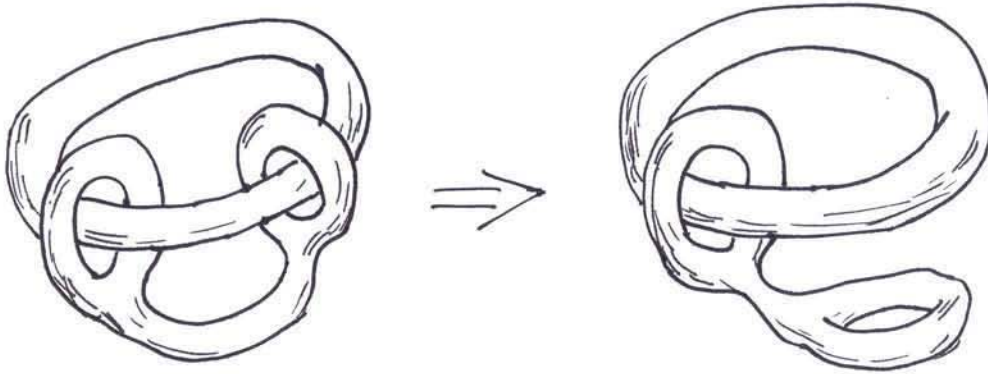
Решение. Рассмотрим на этих поверхностях следующие графы (на лекции именно они рассматривались при подсчете эйлеровых характеристик этих поверхностей):



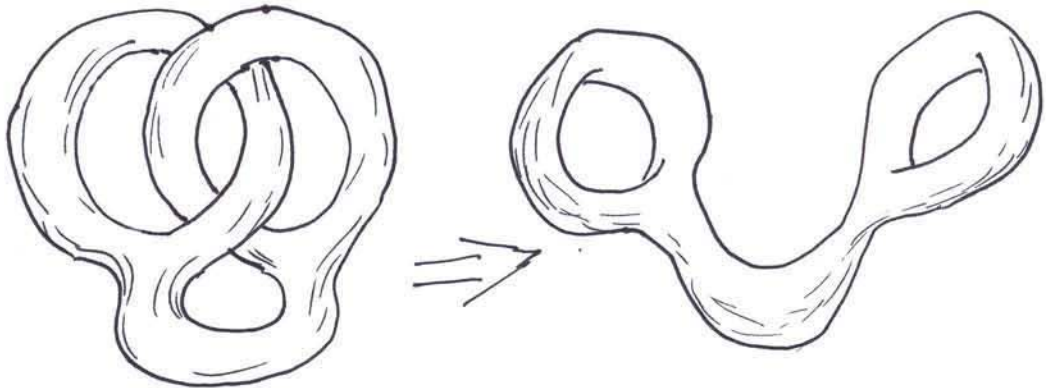


Тогда грани этих графов и дают систему многоугольников (с естественной расстановкой направлений и буквенных пометок на сторонах), из которых склеиванием получаются эти поверхности согласно определению 1.

(3) Доказать, что непрерывной деформацией без разрывов и склеиваний можно снять одно из зацеплений тора и кренделя:

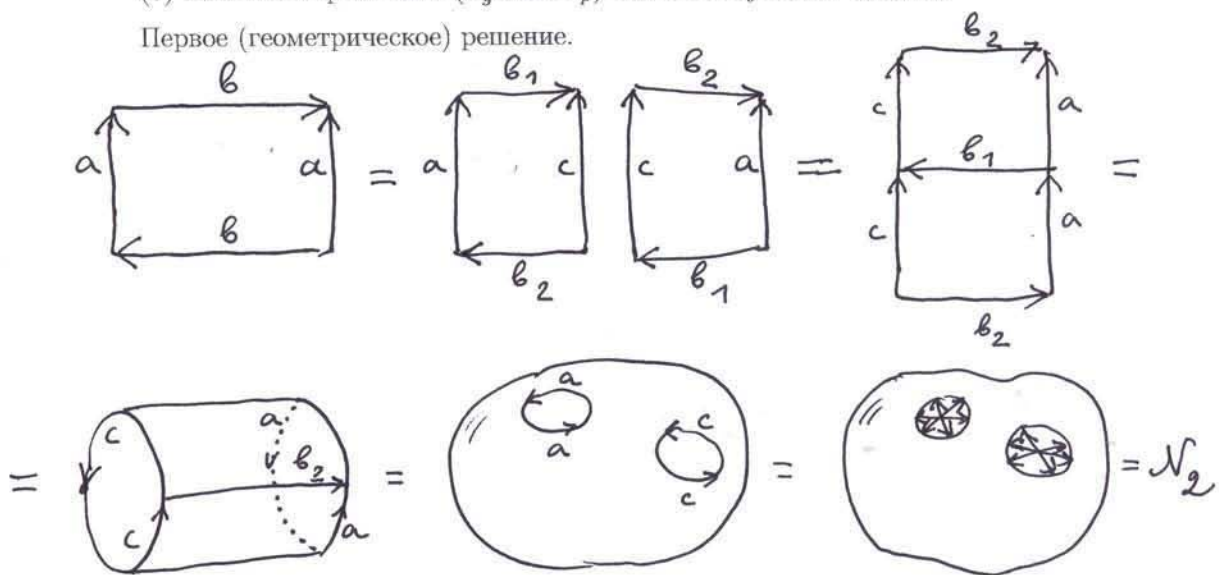


(4) Доказать, что непрерывной деформацией без разрывов и склеиваний можно снять зацепление кренделя:

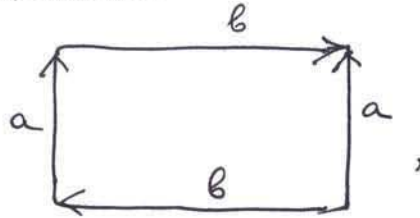


(5) Какой поверхностью ( $S_g$  или  $N_p$ ) является бутылка Клейна?

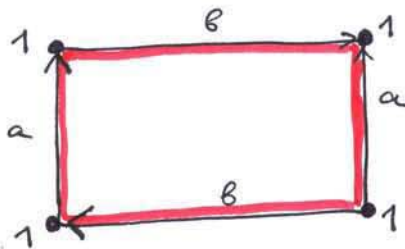
Первое (геометрическое) решение.



Второе решение (с помощью эйлеровой характеристики). Действуем по схеме, указанной сразу после теоремы 8. Поскольку бутылка Клейна задается одним топологическим многоугольником

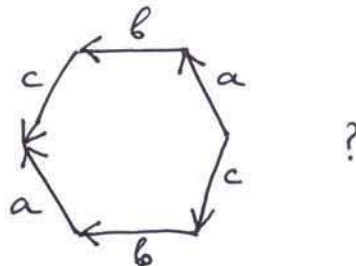


как и в примере 8 устанавливаем, что она неориентируема, а потому имеет тип  $N_p$ . Выбираем на ней граф без самопересечений как и в примере 8

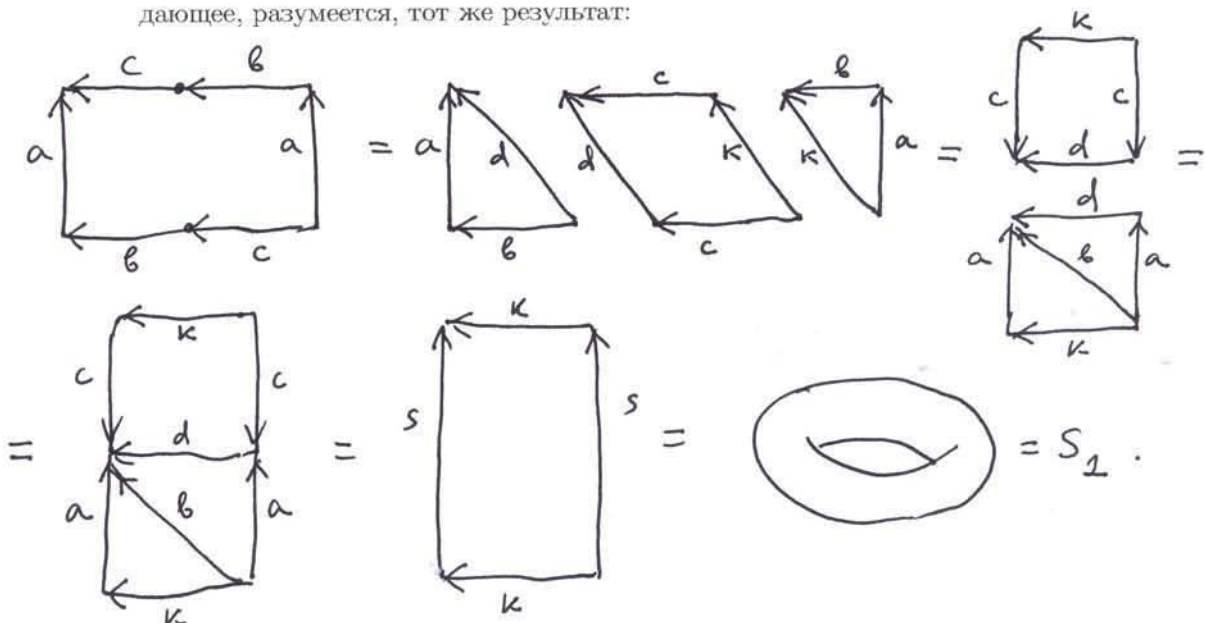


Для него  $V = 1, P = 2, \Gamma = 1$ . Поэтому  $V - P + \Gamma = 0 = 2 - p$ , так что  $p = 2$ .

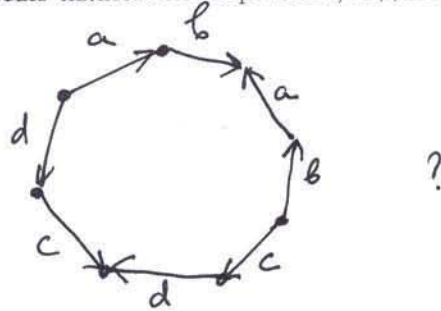
(6) Какой поверхностью является поверхность, заданная следующим многоугольником



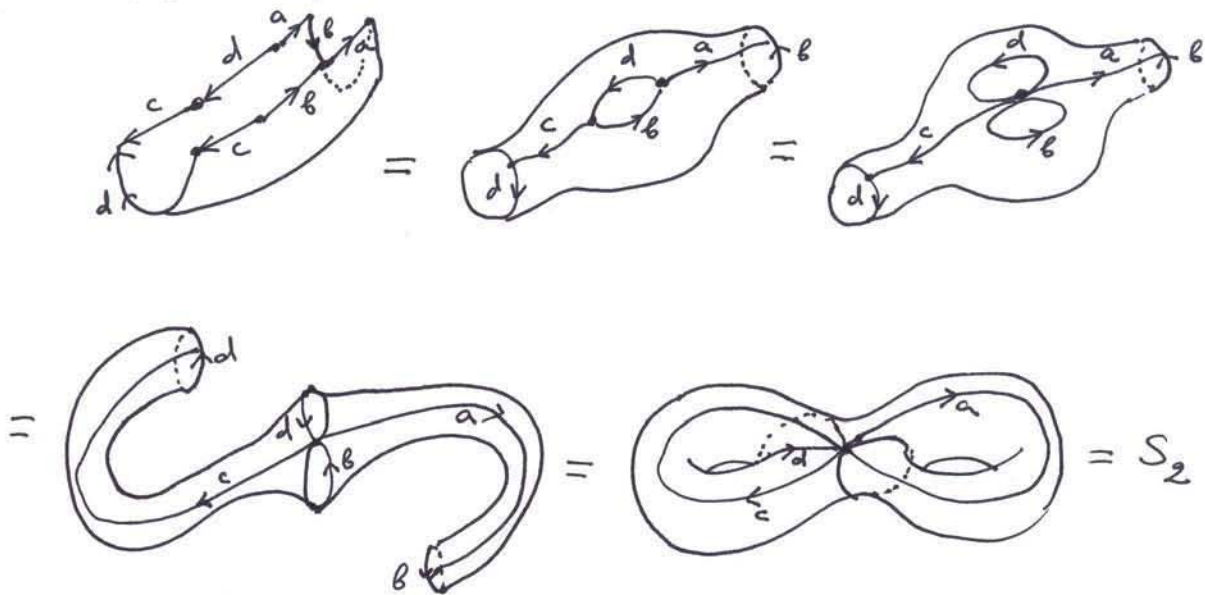
Решение с помощью подсчета эйлеровой характеристики по указанной выше схеме дает, что это  $S_1$ , т.е. тор. Вот непосредственное геометрическое решение, дающее, разумеется, тот же результат:



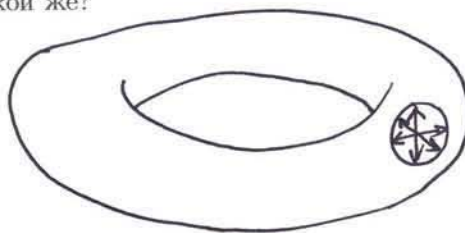
(7) Какой поверхностью является поверхность, заданная следующим многоугольником



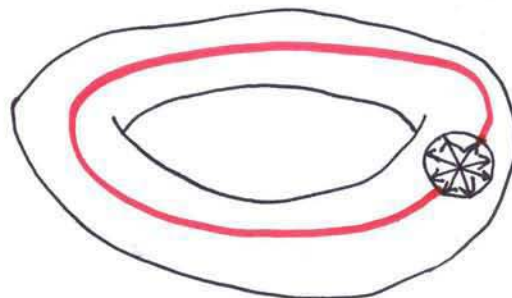
Решение с помощью подсчета эйлеровой характеристики по указанной выше схеме легко дает ответ: это крендель, т.е.  $S_2$ . Получить этот ответ геометрически (переклейками) сложнее, но тоже можно. Вот это геометрическое решение:



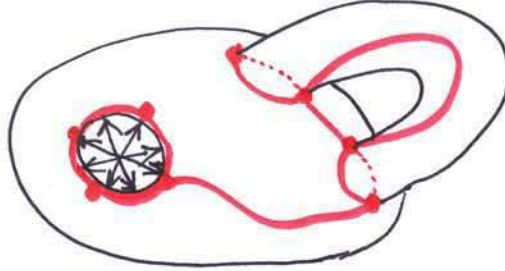
(8) По теореме 5 следующая поверхность является либо поверхностью  $S_g$ , либо поверхностью  $N_p$ . Какой же?



Решение. Рассмотрение красной кривой



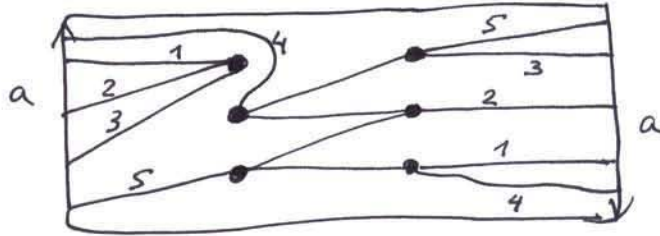
показывает, что поверхность неориентируема, а потому имеет тип  $N_p$ . Для следующего графа



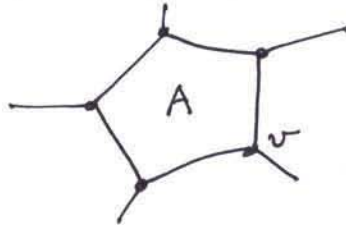
$B = 5, P = 8, l = 2$ , поэтому  $2 - p = 5 - 8 + 2$ , т.е.  $p = 3$ .

(9) Доказать, что граф  $K_{3,3}$  можно уложить без самопересечений на лист Мебиуса.

Решение. Вот эта укладка



(10) Рассмотрим на плоскости связный граф без самопересечений. Любую пару  $(A, v)$ , где  $A$ —грань, а  $v$ —ее вершина, назовем *углом*



Сопоставим каждому углу какое-либо число  $\alpha(A, v)$ , которое назовем *величиной угла*. Назовем *кривизнами вершины v и грани A* соответственно следующие числа

$$K(v) := 2 - \sum \alpha(A, v) \quad \text{суммирование по всем углам при вершине } v, \quad (11)$$

$$K(A) := 2 - \sum (1 - \alpha(A, v)) \quad \text{суммирование по всем углам грани } A. \quad (12)$$

Доказать, что

$$\sum_v K(v) + \sum_A K(A) = 4. \quad (13)$$

Решение. Левая часть (13) не зависит от величин углов, т.к. из формул (11) и (12) видно, что каждое  $\alpha(A, v)$  входит в (13) два раза с разными знаками, а потому сокращается. Значит, достаточно доказать (13) для случая, когда все  $\alpha(A, v)$  равны 1. В этом случае (13) переписывается так:

$2(\text{число вершин}) - \text{сумма степеней всех вершин} + 2(\text{число ребер}) = 4$ .

Но сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер. Поэтому дело сводится в тому, чтобы доказать равенство  $2B - 2P + 2I = 4$ , а оно прямо следует из теоремы 10.

\* \* \*

### Напоминание (лекционный материал)

**Теорема 11.** Для любого связного графа, уложенного без самопересечений на топологическую поверхность  $X$  (не предполагается, что все его грани являются топологическими многоугольниками!) имеет место неравенство

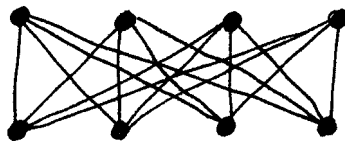
$$B - P + I \geq \chi(X). \quad (14)$$

\* \* \*

### ЗАДАЧА

Доказать, что граф  $K_{4,4}$  нельзя уложить без самопересечений на проективную плоскость  $N_1$ .

Решение. Непосредственно видно, что у графа  $K_{4,4}$  каждый цикл имеет длину не менее 4:



Поэтому, если бы  $K_{4,4}$  допускал укладку без самопересечений на  $N_1$ , то граница каждой грани содержала не менее, чем 4 ребра. Значит, для такой укладки  $4I \leq 2P$  (сопоставляя каждой грани ограничивающие ее ребра, мы подсчитываем каждое ребро дважды: один раз для грани, лежащей по одну его сторону, а другой — по другую). Кроме того, число вершин у графа  $K_{4,4}$  равно 8, а число ребер 16, так что  $B = 8$  и  $P = 16$ . Ввиду формул (8) и (14) это дает  $1 = \chi(N_1) \leq B - P + I \leq B - P + \frac{1}{2}P = B - \frac{1}{2}P = 8 - \frac{1}{2}16 = 0$  — противоречие.

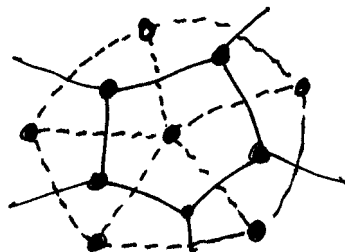
\* \* \*

### Напоминание (лекционный материал)

Раскраска вершин графа  $G$  называется *правильной*, если концы любого ребра окрашены в разные цвета. Хроматическим числом  $\text{col}(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число цветов, с помощью которых можно правильно раскрасить вершины графа  $G$ .

Назовем *картой* на топологической поверхности  $X$  любой связный граф на  $X$ , у которого нет самопересечений и нет граней, которые граничат сами с собой.

Раскраска граней карты на  $X$  называется *правильной*, для любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета. Правильная раскраска граней карты  $S$  на  $X$  — это то же самое, что правильная раскраска вершин *дуального* к  $S$  графа  $S^*$ , определение которого ясно из следующей картинке, на которой ребра карты  $S$  нарисованы сплошными линиями, а графа  $S^*$  — пунктирными:



*Хроматическим числом*  $\text{col}(X)$  *поверхности*  $X$  называется наименьшее число красок, с помощью которых можно правильно раскрасить любую карту на  $X$ . Обозначим через  $[a]$  целую часть вещественного числа  $a$ .

**Теорема 12.** *Для любой замкнутой топологической поверхности*  $X$  (т.е. поверхности  $S_g$  или  $N_p$ ), кроме бутылки Клейна  $N_2$ , имеет место формула

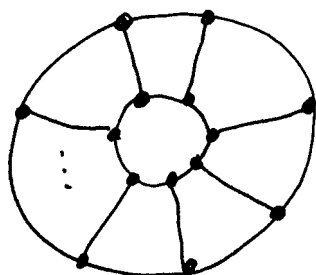
$$\text{col}(X) = \left[ \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2} \right], \quad (15)$$

а для бутылки Клейна  $\text{col}(N_2) = 6$  (а не 7 как дает формула (15)).

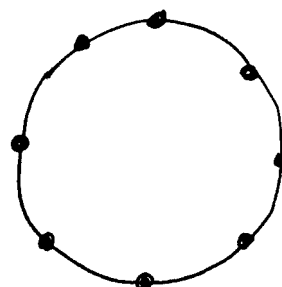
\* \* \*

## ЗАДАЧИ

(1) Найти хроматические числа следующих графов



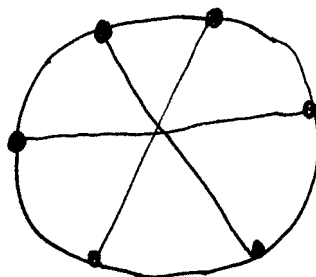
( $2n$  вершин)



( $n$  вершин)

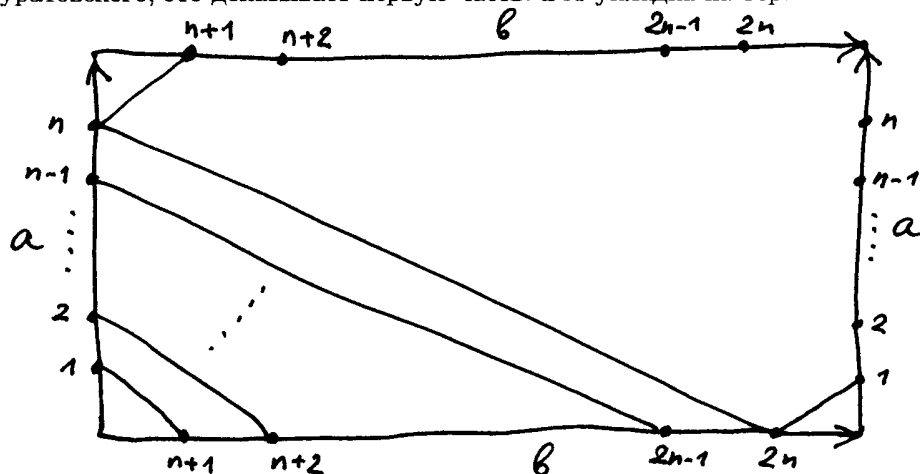
(2) Найти хроматические числа графов  $K_n$  и  $K_{n,m}$ .

(3) Пусть  $G$  — следующий граф с  $n$  вершинами



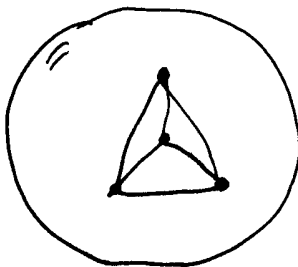
Доказать, что он не укладывается без самопересечений на сферу, но укладывается на тор (иначе говоря, доказать, что  $\gamma(G) = 1$ ).

Решение. В  $G$  легко найти подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ . По теореме Понтрягина-Куратовского, это доказывает первую часть. Вот укладка на тор:



(4) Формулы (8) и (15) показывают, что хроматическое число сферы равно 4. Нарисовать карту на сфере, которую меньшим, чем 4, числом цветов правильно раскрасить нельзя.

Решение.



(5) Формулы (8) и (15) показывают, что хроматическое число проективной плоскости  $N_1$  равно 6. Нарисовать карту на  $N_1$ , которую меньшим, чем 6, числом цветов правильно раскрасить нельзя.

\* \* \*

#### Напоминание (лекционный материал)

Сетью  $N$  называется ориентированный граф без петель с конечным числом вершин и ребер, у которого

- выделены две вершины: одна называется *источником* и обозначается  $s$ , а другая — *стоком* и обозначается  $t$ ,
- зафиксирована неотрицательная числовая функция  $c$  на множестве ребер, называемая *пропускной способностью сети*.

Потоком величины  $v$  в сети  $N$  называется любая неотрицательная числовая функция  $f$  на множестве ребер, обладающая свойствами

- $f(\vec{ab}) \leq c(\vec{ab})$  для любого ребра  $\vec{ab}$  сети  $N$ ;
- для любой вершины  $x$  сети  $N$  выполнено равенство

$$\sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{ребрам вида } \vec{xy}}} f(\vec{xy}) - \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{ребрам вида } \vec{zx}}} f(\vec{zx}) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \neq s, t, \\ v & \text{если } x = s, \\ -v & \text{если } x = t \end{cases}$$

Пусть  $A$  — какое-либо множество вершин сети  $N$ , содержащее  $s$ , но не содержащее  $t$ . Совокупность всех ребер сети, начинающихся в  $A$  и кончающихся не в  $A$ , называется *разрезом* сети  $N$ . Сумма пропускных способностей всех указанных ребер называется *пропускной способностью разреза*.

**Теорема 13** (Форд и Фалкерсон). *Среди всех потоков в сети  $N$  существует такой, величина которого максимальна. Эта величина равна минимуму пропускных способностей разрезов сети  $N$ .*

*Алгоритм нахождения потока максимальной величины*

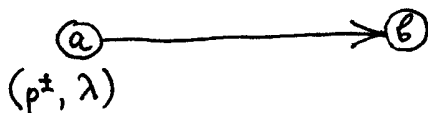
На практике пропускную способность  $c$  и рассматриваемый поток  $f$  задают, надписывая над каждым ребром  $\vec{ab}$  пару чисел  $c(\vec{ab}), f(\vec{ab})$ .

- Поиск потока максимальной величины начинают с рассмотрения нулевого потока (т.е. такого, значение которого на любом ребре равно нулю).
- Следующая процедура, позволяет либо заключить, что рассматриваемый поток  $f$  имеет максимальную величину, либо заменить его на поток большей величины:

Расставляем на вершинах сети пометки по следующему правилу:

- Сначала помечаем источник  $s$  особой отметкой  $(-, \infty)$ ; для всех других вершин пометки будут иметь вид  $(a^\pm, \lambda)$ , где  $a$  — вершина, а  $\lambda$  — число.
- “Распространение” пометок с помеченной вершины на непомеченную. Пусть имеется ребро с вершинами  $a$  и  $b$ , где  $a$  — помеченная вершина, а  $b$  — не помеченная.

Если это ребро имеет вид

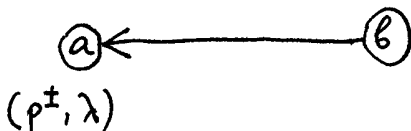


где  $c(\vec{ab}) > f(\vec{ab})$  (строгое неравенство!),

то вершина  $b$  снабжается пометкой

$$(a^+, \min\{\lambda, c(\vec{ab}) - f(\vec{ab})\})$$

Если же это ребро имеет вид



где  $f(\vec{ab}) > 0$  (строгое неравенство!)



то вершина  $b$  снабжается пометкой

$$(a^-, \min\{\lambda, f(\overleftarrow{ab})\})$$

(iii) Возникает две возможности:

- (а) либо последовательное применение указанного в (ii) правила распространения пометок приведет к тому, что сток  $t$  окажется помеченным,
- (б) либо оно приведет к тому, что такое распространения более невозможно будет сделать ни из одной помеченной вершины, но сток  $t$  так и окажется не помеченным.

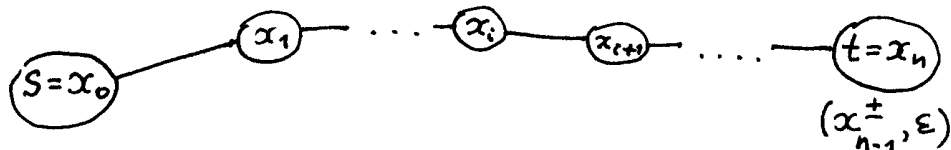
Если имеет место возможность (б), то рассматриваемый поток является искомым — он имеет максимальную величину. Более того, совокупность всех помеченных вершин образует разрез с минимальной пропускной способностью.

Если же имеет место возможность (а), то следующая процедура позволяет заменить поток  $f$  на поток большей величины (к нему затем нужно заново применить процедуру расстановки пометок — и так до тех пор, пока через несколько шагов не получится поток максимальной величины):

Поскольку сток  $t$  оказался помеченным:

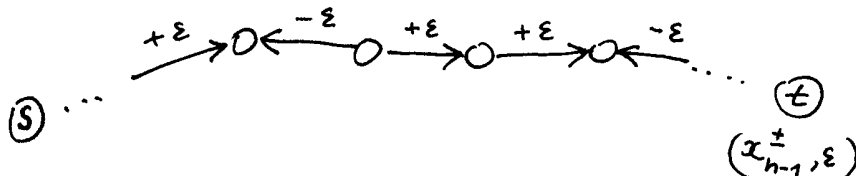
$$\begin{array}{c} \textcircled{t} \\ (\rho^{\pm}, \varepsilon) \end{array}$$

имеется путь с началом в  $s$  и концом в  $t$

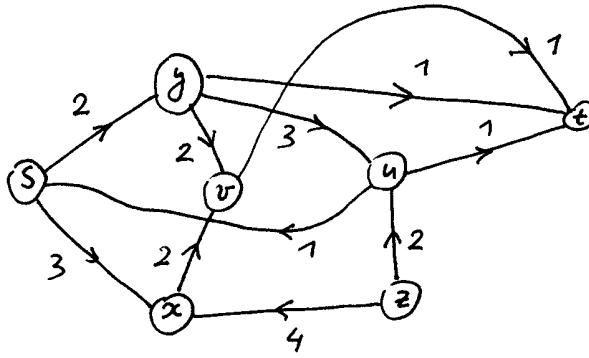


все вершины которого помечены, такой, что для любого  $i > 0$  пометка вершины  $x_i$  получилась из пометки вершины  $x_{i-1}$  с помощью правила распространения пометок, описанного выше в п. (ii). Поток  $f$  теперь меняется только на ребрах этого пути по следующему правилу:

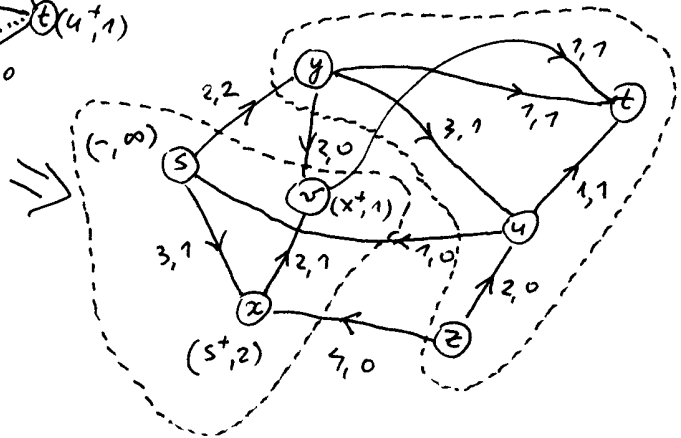
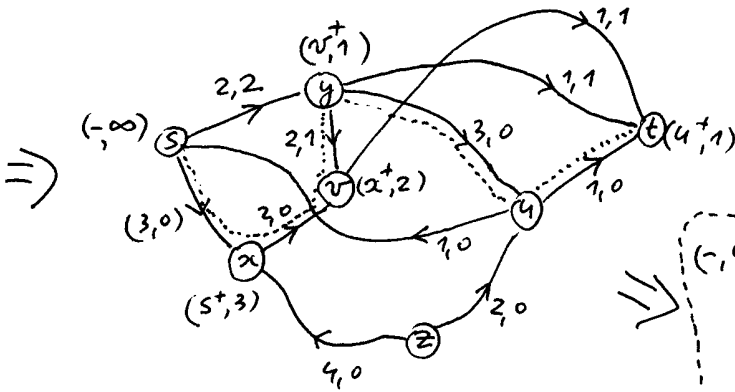
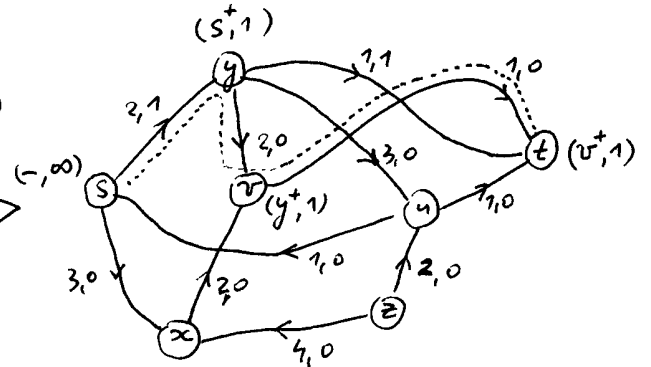
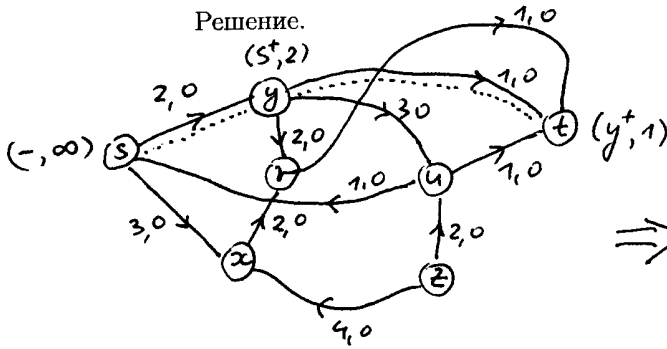
- если ребро с концами  $x_{i-1}$  и  $x_i$  имеет вид  $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ , то  $f(\overrightarrow{x_{i-1}x_i})$  заменяется на  $f(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \varepsilon$ ;
- если же ребро с концами  $x_{i-1}$  и  $x_i$  имеет вид  $\overleftarrow{x_{i-1}x_i}$ , то  $f(\overleftarrow{x_{i-1}x_i})$  заменяется на  $f(\overleftarrow{x_{i-1}x_i}) - \varepsilon$ ;



**ПРИМЕР** Найти поток максимальной величины и разрез с минимальной пропускной способностью в сети



Решение.



Преподавателю следует дать студентам аналогичные задачи, самому нарисовав какие-либо сети.

**В КОНЦЕ ЗАНЯТИЯ 7 СЛЕДУЕТ ВЫДАТЬ НА ДОМ ДОМАШНЮЮ РАБОТУ №2.** Задания лежат в конверте. Просьба возвращать задания в конверт! Номер задания совпадает в номером студента в журнале группы.

## Занятие 8

## ТЕМА:

- Лемма Бернсайда: применение теории групп к комбинаторике

## Напоминания (лекционный материал)

Преобразованием множества  $M$  называется любое взаимно однозначное отображение  $M \rightarrow M$ . Все преобразования множества  $M$  образуют группу  $S(M)$ , в которой групповой операцией является композиция. Любая подгруппа в  $S(M)$  называется группой преобразований множества  $M$ .

Пусть  $G$  — какая-либо группа преобразований множества  $M$ . Орбитой элемента  $m \in M$  относительно этой группы называется множество

$$G(m) := \{\varphi(m) \mid \varphi \in G\}.$$

Если  $\varphi$  — какой-либо элемент из  $G$ , положим

$$M^\varphi := \{m \in M \mid \varphi(m) = m\},$$

т.е.,  $M^\varphi$  — это множество неподвижных точек преобразования  $\varphi$ .

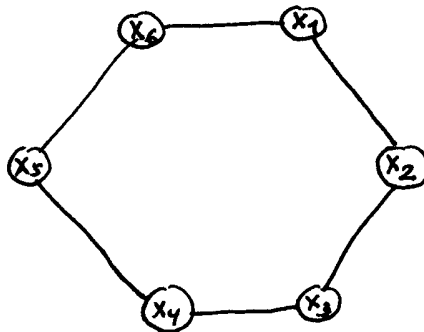
Орбиты образуют разбиение множества  $M$ , т.е. покрывают его “как паркет”: каждая точка из  $M$  лежит и притом ровно в одной орбите.

**Теорема 14** (Лемма Бернсайда). Пусть  $G$  — группа преобразований конечного множества  $M$  (тем самым,  $G$  автоматически тоже конечна). Тогда

$$\text{число орбит группы } G \text{ в } M \text{ равно } \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} |M^\varphi|. \quad (16)$$

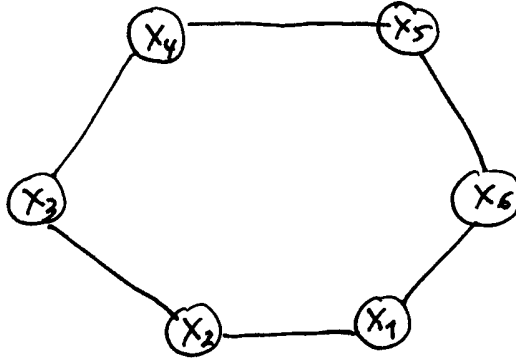
**Пример 9.** Сколько существует различных ожерелий из шести бусин трех разных цветов К (красный), С (синий), З (зеленый)?

Решение. Назовем портретом ожерелья любую картинку вида



где  $X_i$  для любого  $i$  есть одна из букв К, С, З. Пусть  $M$  — это множество всех возможных портретов. Ясно, что  $|M| = 3^6$ . Группа  $G$  симметрий правильного 6-угольника (т.е. группа диэдра  $D_6$ ) естественно интерпретируется как группа

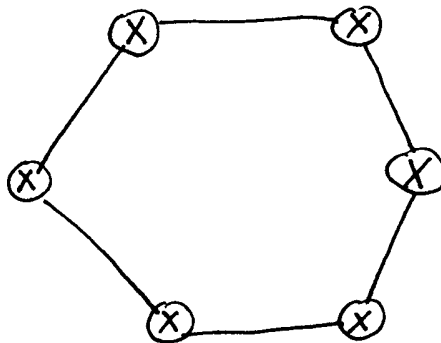
преобразований множества  $M$ : например, если  $\varphi$  — это поворот правильного 6-угольника вокруг центра на  $2\pi/3$  по часовой стрелке, а  $m$  — изображенный выше портрет, то портрет  $\varphi(m)$  имеет вид



Легко понять, что два портрета являются портретами одного и того же ожерелья в точности тогда, когда они лежат на одной орбите группы  $G$ . Поэтому искомое число ожерелий равно числу орбит. Последнее подсчитывается по формуле (16).

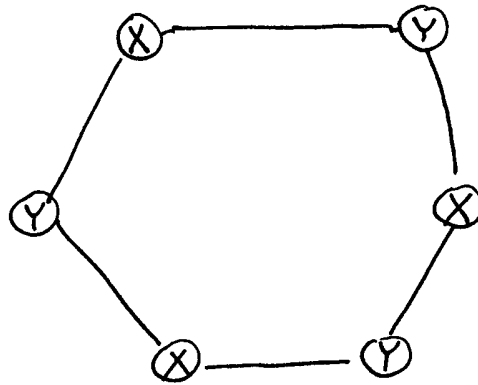
Если  $\varphi$  — тождественное преобразование, то  $M^\varphi = M$ , так что  $|M^\varphi| = 3^6$ .

Если  $\varphi$  — поворот поворот правильного 6-угольника вокруг центра на  $2\pi/6$  по часовой стрелке, то портрет лежит в  $M^\varphi$  в точности тогда, когда он имеет вид



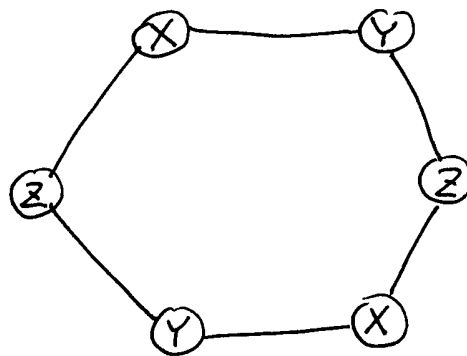
где  $X$  — одна из букв  $K, C, Z$ . Поэтому  $|M^\varphi| = 3^1$ . Аналогично — для поворота правильного 6-угольника вокруг центра на  $2\pi/6$  против часовой стрелки.

Если  $\varphi$  — поворот поворот правильного 6-угольника вокруг центра на  $2\pi/3$  по часовой стрелке, то портрет лежит в  $M^\varphi$  в точности тогда, когда он имеет вид



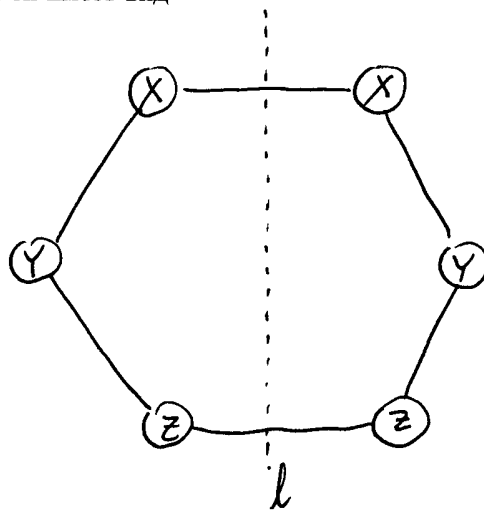
где  $X$  и  $Y$  — одна из букв К, С, З. Поэтому  $|M^\varphi| = 3^2$ . Аналогично — для поворота правильного 6-угольника вокруг центра на  $2\pi/3$  против часовой стрелки.

Если  $\varphi$  — симметрия правильного 6-угольника относительно центра, то портрет лежит в  $M^\varphi$  в точности тогда, когда он имеет вид



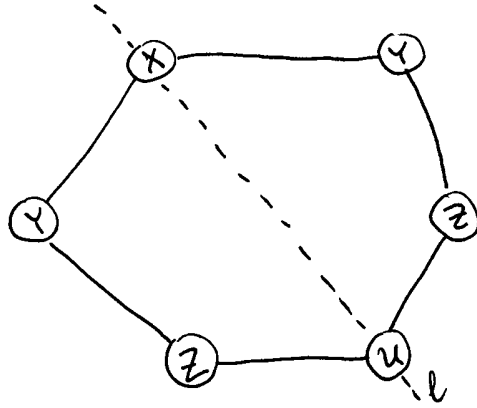
где  $X, Y, Z$  — одна из букв К, С, З. Поэтому  $|M^\varphi| = 3^3$ .

Если  $\varphi$  — симметрия правильного 6-угольника относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон, то портрет лежит в  $M^\varphi$  в точности тогда, когда он имеет вид



где  $X, Y, Z$  — одна из букв К, С, З. Поэтому  $|M^\varphi| = 3^3$ . Таких осей имеется 3.

Наконец, если  $\varphi$  — симметрия правильного 6-угольника относительно оси, проходящей через противоположные вершины, то портрет лежит в  $M^\varphi$  в точности тогда, когда он имеет вид



где  $X, Y, Z, U$  — одна из букв К, С, З. Поэтому  $|M^\varphi| = 3^4$ . Таких осей имеется 3.

Отсюда и из формулы (16) получаем

число различных ожерелий равно  $\frac{1}{12}(3^6 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4) = 92$ .

\* \* \*

### ЗАДАЧИ

- (1) Сколько имеется различных кубов, грани которых окрашены тремя разными цветами?
- (2) Сколько имеется различных молекул, имеющих форму куба, в вершинах которого расположены атомы трех разных типов?
- (3) То же, что в задачах (1) и (2), где куб заменен на тетраэдр.
- (4) Сколько существует различных игральных костей?

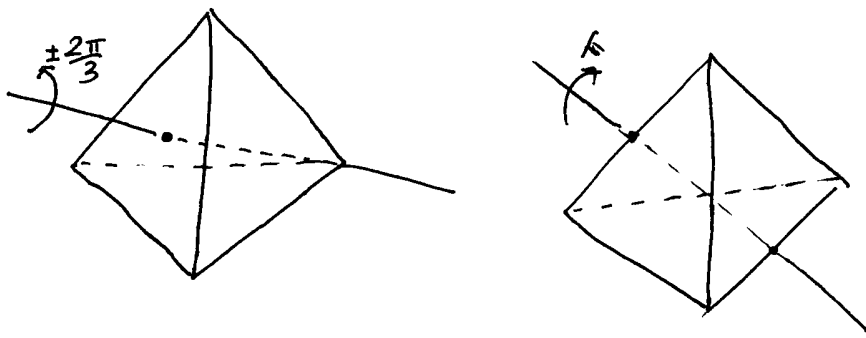
\* \* \*

Для решения сформулированных выше задач нужно знать строение групп вращений тетраэдра и куба. Это обсуждалось на лекции. Вот ответ.

*Группа вращений тетраэдра  $T$ :*

Нетождественные элементы:

- Вращения на углы  $\pm 2\pi/3$  вокруг оси, соединяющей вершины и центр противоположной грани. Таких осей имеется 4.
- Вращения на  $\pi$  вокруг оси, соединяющих середины противоположных сторон. Таких осей имеется 3.



Группа вращений куба  $C$ :

Нетривиальные элементы:

- Вращения на углы  $\pm 2\pi/3$  вокруг оси, соединяющей противоположные вершины. Таких осей имеется 4.
- Вращения на  $\pi$  вокруг оси, соединяющих середины противоположных сторон. Таких осей имеется 6.
- Вращения на  $2\pi s/4$ ,  $s = 1, 2, 3$ , вокруг оси, соединяющих центры противоположных граней. Таких осей имеется 3.

